Bachelorarbeit zum Thema Freyd-Mitchellscher-Einbettungssatz

bei Herrn Prof. Dr. Manuel Blickle
im Fachbereich Mathematik an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

Linda Raabe

Inhaltsverzeichnis

1 Danksagung **5**

2 Motivation und Hintergrund **7**

3 Grundlagen **9**
3.1 Definitionen 9
3.2 Funktoren 13

4 Freyd-Mitchellscher Einbettungssatz **17**
4.1 Einbettung in die Kategorie der linksexakten Funktoren 17
4.2 Einbettung in die Kategorie der R-Moduln 18
4.3 Verkettung der Einbettungen 21

5 Schlusswort **23**

6 Referenzen und Quellen **25**

7 Eigenständigkeitserklärung **27**

1 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich außerordentlich bei meinem Betreuer, Manuel Blickle, für die hervorragende Betreuung bedanken. Ich kann mir nicht vorstellen, dass ich in irgendeiner Art und Weise besser hätte betreut werden können. Vielen herzlichen Dank dafür!
Des Weiteren möchte ich mich bei meinen vielen Korrekturlesern bedanken, die mit hoher Aufmerksamkeit viele Fehler gefunden haben. Im Einzelnen bedanke ich mich bei Peter Frey, Jan Gerhardt, Sonja Spies und Laura Hindersin. Besonders möchte ich meinen Eltern danken, die trotz Fachfremdheit meine Arbeit Korrektur gelesen haben.
Ein besonderer Dank gilt außerdem noch Eugenia Cheng, die in ihrem YouTube-Kanal „The Catsters“ zusammen mit Simon Willerton auf wunderbare Weise Kategorientheorie lehrt.

2 Motivation und Hintergrund

In der Kategorientheorie ist der Kern vieler Beweise die „Diagrammjagd“. Man hat als Grundlage ein kommutierendes Diagramm, also eine Menge von Morphismen und Objekten. Indem man ein Objekt durch ein Diagramm „jagt“, kann man wichtige Aussagen beweisen.
In einer allgemeinen Kategorie weiß man nun leider nicht unbedingt, was die Morphismen, also die Pfeile, genau darstellen. Per Definition sind es Mengen, auf denen zwar eine Verknüpfung definiert sein muss, aber wenn wir mit richtigen Abbildungen rechnen könnten, wäre das natürlich viel schöner.

Peter Freyd hat nun 1960 in seiner Dissertation gezeigt, dass jede kleine abelsche Kategorie exakt in die Kategorie der abelschen Gruppen eingebettet werden kann. Dadurch können wir Aussagen über Exaktheit und Kommutativität von Diagrammen in der Kategorie der abelschen Gruppen auch über abelsche Kategorien treffen. Das Problem an dieser Einbettung ist aber, dass sie nicht voll ist, das heißt der Funktor ist auf den Morphismen nicht surjektiv. Dadurch können wir wiederum Aussagen über die Existenz von Morphismen in der Kategorie der abelschen Gruppen im Allgemeinen nicht in jeder abelschen Kategorie analog machen.

Im Jahr 1964 hat Barry Mitchell dann eine Verbesserung der Aussage bewiesen: Jede kleine abelsche Kategorie kann exakt und volltreu in die Kategorie der R-Moduln eingebettet werden. Nun haben wir die ganzen Vorzüge der Aussage von Freyd und müssen uns zusätzlich keine Gedanken mehr um die Existenz von Morphismen machen, denn die Einbettung ist voll. Da der Vergissfunktor von der Kategorie der R-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen auch exakt ist, schließt diese Aussage die Aussage von Freyd ein. Der hier bewiesene Satz ist die Verbesserung von Mitchell, der Freyd-Mitchellsche Einbettungssatz.

Im Beweis werden wir zuerst unter Benutzung des Yoneda Lemmas und des Hom-Funktors eine abelsche Kategorie in die Kategorie der linksexakten Funktoren einbetten. Vor der nächsten Einbettung werden wir dann beweisen, dass die Kategorie der linksexakten Funktoren abelsch ist und sowohl genügend injektive Objekte als auch einen Erzeuger besitzt. Die letzten beiden Eigenschaften lassen sich mit wenig Aufwand von der Kategorie der Funktoren vererben, für die erste Aussage werden wir auf einen Beweis in der Literatur verweisen.
Danach betten wir die duale Kategorie zu der Kategorie der linksexakten Funktoren in die Kategorie der R-Moduln ein, indem wir mit einem projektiven Koerzeuger (den wir uns erst einmal konstruieren) einen Ring für die R-Moduln definieren. Am Schluss werden

wir noch zeigen, dass diese Einbettung exakt und volltreu ist.
Wenn wir nun alle Einbettungen hintereinander ausführen, haben wir eine beliebige abelsche Kategorie exakt und volltreu in die Kategorie der R-Moduln eingebettet.

3 Grundlagen

3.1 Definitionen

Definition 3.1 (Kategorie)
Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ ist eine Klasse von Objekten (Notation: $ob\mathcal{C}$ oder $\mathcal{C}$) zusammen mit *Morphismenmengen* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für alle $A, B \in \mathcal{C}$ (oft wird der Index $\mathcal{C}$ weggelassen, wenn die Kategorie klar ist) für die gilt:

- Es ist eine assoziative Komposition definiert:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \text{ für alle } A, B, C \in \mathcal{C}$$

- Für alle $A \in \mathcal{C}$ muss $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ die Identität enthalten.

Falls die Objekte einer Kategorie eine Menge (und keine Klasse) bilden, so nennen wir die Kategorie *klein*. Wir nennen $\mathcal{C}^{op}$ die *duale Kategorie* zu $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}^{op}$ soll die gleichen Objekte wie $\mathcal{C}$ enthalten und es soll gelten:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{C}$$

Definition 3.2 (besondere Morphismen)
Ein Morphismus $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißt

- *Monomorphismus*, falls $\alpha f = \alpha g \Rightarrow f = g$ für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$.
- *Epimorphismus*, falls $f\alpha = g\alpha \Rightarrow f = g$ für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.
- *Isomorphismus*, falls ein $\alpha' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ existiert mit $\alpha'\alpha = 1_A$ und $\alpha\alpha' = 1_B$.

Definition 3.3 (besondere Objekte)
Ein Objekt $B \in \mathcal{C}$ heißt

- *initial*, falls für alle $C \in \mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ nur aus einem Element besteht.
- *terminal*, falls für alle $A \in \mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ nur aus einem Element besteht.
- *Nullobjekt* oder *0*, falls es terminal und initial ist.

Definition 3.4 (Unterobjekt)
Falls $\alpha : A' \to A$ ein Monomorphismus ist, nennen wir A' ein *Unterobjekt* von A und nennen α die *Einbettung* von A' in A. Wir schreiben $A' \subset A$ und sagen „A enthält A'“. Falls α kein Isomorphismus ist, nennen wir A' *echtes Unterobjekt* von A.
Für $f : A \to B$ nennen wir $f\alpha : A' \to B$ die *Einschränkung* von f auf A' und schreiben $f|_{A'} : A' \to B$.

Bemerkung
Die terminalen Objekte in $\mathcal{C}$ sind die initialen Objekte in $\mathcal{C}^{op}$ und umgekehrt. Falls ein Nullobjekt existiert, ist es bis auf Isomorphie eindeutig.

Definition 3.5 (Bild und Kobild)
Sei $f : A \to B$ ein Morphismus. Falls sich f als $f = me$ schreiben lässt, wobei $e : A \to T$ ein Epimorphismus und $m : T \to B$ ein Monomorphismus ist, so heißt T das *Bild* von f und man schreibt $T = \operatorname{im} f$.
Falls sich f als $f = em$ schreiben lässt, wobei $m : A \to T$ ein Monomorphismus und $e : T \to B$ ein Epimorphismus ist, so heißt T das *Kobild* von f und wir schreiben $T = \operatorname{coim} f$.
Das Bild und das Kobild sind eindeutig, falls sie existieren. Dies folgt direkt aus den Eigenschaften von Mono- und Epimorphismen. Es gilt: $f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im} f = 0$.

Definition 3.6 (Kern und Kokern)
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, $\alpha : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Wir nennen $u : K \to A$ zusammen mit K den *Kern* von α, falls $\alpha u = 0$ und falls für alle anderen Morphismen $u' : K' \to A$ mit $\alpha u' = 0$ ein eindeutiger Morphismus $\gamma : K' \to K$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "u"] \arrow[rrr, bend left, "0"] & & A \arrow[r, "\alpha"] & B \\
& K' \arrow[ul, "\exists ! \gamma"] \arrow[ur, "u'"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wir nennen $u : A \to Ko$ zusammen mit Ko den *Kokern* von α, falls $u\alpha = 0$ und falls für alle anderen Morphismen $u' : A \to Ko'$ mit $u'\alpha = 0$ ein eindeutiger Morphismus $\gamma : Ko \to Ko'$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
Ko \arrow[dr, "\exists ! \gamma"'] & & A \arrow[ll, "u"'] \arrow[dl, "u'"] & B \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[lll, bend right, "0"'] \arrow[dll, bend left, "0"] \\
& Ko' & &
\end{tikzcd}$$

Kokerne sind Kerne in der dualen Kategorie und umgekehrt.

Definition 3.7 (Pushout)
Seien f und g Morphismen mit $A \xrightarrow{f} B$ und $A \xrightarrow{g} C$. Der *Pushout* von f und g besteht aus zwei Morphismen $B \xrightarrow{h} P$ und $A \xrightarrow{i} P$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] & P \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Folgende universelle Eigenschaft soll erfüllt sein: Für alle Morphismen j und k wie unten existiert ein eindeutiges $u : P \to Z$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & & Z \\ B \arrow[r, "h"'] \arrow[urr, bend left, "j"] & P \arrow[ur, "\exists! u"] & \\ A \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"] & C \arrow[u, "i"'] \arrow[uur, bend right, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Pushouts sind bis auf Isomorphismen eindeutig.

Definition 3.8 (Exaktheit)
Eine Sequenz von Morphismen $\ldots \stackrel{\alpha_{i-2}}{\to} A_{i-1} \stackrel{\alpha_{i-1}}{\to} A_i \stackrel{\alpha_i}{\to} A_{i+1} \stackrel{\alpha_{i+1}}{\to} \ldots$ heißt *exakt an der Stelle* i, falls $\ker \alpha_{i+1} = \operatorname{im} \alpha_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Die Sequenz heißt *exakt*, falls sie es an jeder Stelle ist.
Eine exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ heißt *kurze exakte Sequenz.*

Bemerkung
$0 \to A \to B$ ist exakt $\Leftrightarrow$ $A \to B$ ist ein Monomorphismus und $A \to B \to 0$ ist exakt $\Leftrightarrow$ $A \to B$ ist ein Epimorphismus.

Definition 3.9 (additive Kategorie)
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *additiv*, falls gilt:

- Für alle $A, B \in \mathcal{C}$ bildet die Menge $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ eine abelsche Gruppe bezüglich einer Verknüpfung $+$.
- Die Komposition $\circ$ ist bilinear.

Bemerkung
In einer additiven Kategorie gilt: α ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow$ $\ker \alpha = 0$. β ist ein Epimorphismus $\Leftrightarrow$ $\operatorname{coker} \beta = 0$.

Definition 3.10 (Produkt und Koprodukt)
Sei $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $\{X_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$ eine Familie von Objekten.
Sei weiter $\{f_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen. Falls für jede Familie $\{\alpha_i : X' \to X_i\}_{i \in I}$ von Morphismen ein eindeutiger Morphismus $f : X' \to X$ existiert, so dass für alle $i \in I$ das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f_i"] & \\ X' \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\alpha_i"'] & & X_i \end{tikzcd}$$

so nennen wir $\{f_i\}_{i\in I}$ *Produkt* für $\{X_i\}_{i\in I}$. Wir nennen die Morphismen f_i *Projektionen.* Analog definieren wir das *Koprodukt* in der dualen Kategorie. Hier, wie auch bei vielen anderen Autoren, werden wir Koprodukte als Summe bezeichnen.

Definition 3.11 (abelsche Kategorie)
Eine additive Kategorie $\mathcal{A}$ heißt abelsch, falls

- für alle Morphismen Kerne und Kokerne existieren
- jeder Monomorphismus ein Kern und jeder Epimorphismus ein Kokern ist

Da es in dieser Arbeit um die Einbettung von abelschen Kategorien geht, betrachten wir ab jetzt nur noch abelsche Kategorien.

Beispiel
Die Kategorie der R-Moduln R-Mod bildet eine abelsche Kategorie, wobei die Objekte von R-Mod die Moduln über dem Ring R sind und die Morphismen Homomorphismen zwischen R-Moduln sind. Der Nullmodul liefert das Nullobjekt. Durch die Eigenschaft der R-Moduln bildet die Komposition von (Homo-)Morphismen bezüglich + eine abelsche Gruppe und ist bilinear. Da wir nur Homomorphismen als Morphismen betrachten, werden auch die Bedingungen für eine abelsche Kategorie erfüllt. R-Mod ist also eine abelsche Kategorie.

Die Kategorie der abelschen Gruppen *Ab* bildet genau wie R-Mod eine abelsche Kategorie.

Definition 3.12 (Injektive und projektive Objekte)
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $I \in \mathcal{C}$ heißt *injektiv* genau dann, wenn für zwei gegebene Morphismen $\alpha : A \to I$ und $\beta : A \hookrightarrow B$ mindestens ein Morphismus $g : A \to I$ existiert so, dass $\alpha = \beta g$. Folgendes Diagramm muss also kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\exists g"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ hat genügend injektive Objekte, falls für alle Objekte $A \in \mathcal{C}$ ein Monomorphismus $m : A \to I$ existiert, wobei I injektiv ist.
Analog werden *projektive* Objekte in der dualen Kategorie definiert: Ein Objekt $P \in \mathcal{C}$ heißt *projektiv* genau dann, wenn für zwei gegebene Morphismen $\alpha : P \to A$ und $\beta : B \twoheadrightarrow A$ mindestens ein Morphismus $h : P \to B$ existiert so, dass $\beta\alpha = h$ ist. Folgendes Diagramm muss also kommutieren:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

3.2 Funktoren

Definition 3.13 (Funktor)
Ein *(kovarianter) Funktor* F ist eine Abbildung von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

- F liefert eine Abbildung $F_{\mathcal{C}} : ob\mathcal{C} \to ob\mathcal{D}$.
- F liefert eine Abbildung $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ für alle $A, B \in \mathcal{C}$, für die gilt:
  - $F(fg) = F(f)F(g)$ für alle Morphismen f, g.
  - $F(id_X) = id_{F(X)}$ für alle $X \in \mathcal{C}$.

Ein *kontravarianter Funktor* $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$. Dies bedeutet, dass die Reihenfolge der Morphismen bei der Komposition vertauscht wird ($F(fg) = F(g)F(f)$).
Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *linksexakt*, falls für $0 \to A \to B \to C$ exakt, auch $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ exakt ist. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *rechtsexakt*, falls für $A \to B \to C \to 0$ exakt ist, ist auch $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ exakt. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *exakt*, falls er linksexakt und rechtsexakt ist.
F heißt *treu*, beziehungsweise *voll*, falls die Abbildung
$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ injektiv, bzw. surjektiv ist. Ein voller und treuer Funktor heißt volltreu.
Wir bezeichnen $Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ als *Funktorkategorie*, wobei die Objekte von $Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Funktoren sind und die Morphismen Abbildungen zwischen Funktoren, sogenannte *natürliche Transformationen.*

Bemerkung
$Fun(\mathcal{A}, Ab)$ mit $\mathcal{A}$ abelsch hat genügend injektive Objekte und einen Erzeuger (da beides auch in $\mathcal{A}$ gilt).

Lemma 3.14
Ein exakter Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen additiven Kategorien ist treu $\Leftrightarrow$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt: Falls $T(C) = 0$, ist $C = 0$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei F treu und $T(C) = 0 \Rightarrow T(1_C) = 1_{T(C)} = 1_0 = 0 = T(0)$. Da F treu ist, folgt durch die Injektivität $C = 0$.
($\Leftarrow$) Es gilt: $f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im} f = 0$ und $T(\operatorname{im} f) = \operatorname{im} T(f)$, da T exakt ist. Da T exakt ist, ist er auch additiv und wir können die Injektivität zurückführen auf $T(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.
Sei nun also $T(f) = 0 \Rightarrow \operatorname{im} T(f) = 0 \Rightarrow T(\operatorname{im} f) = 0 \overset{Vor.}{\Rightarrow} \operatorname{im} f = 0 \Rightarrow f = 0$.

Definition 3.15 (Hom-Funktor)
Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt, dann definiert $h_A : \mathcal{C} \to Set$, wobei Set die Kategorie aller Mengen ist, einen kovarianten Funktor durch:

- $h_A(B) : \mathcal{C} \to Set, B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für alle $B \in \mathcal{C}$
- $h_A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y), g \mapsto f \circ g$ für alle $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$

Der kontravarianter Hom-Funktor $h^A : \mathcal{C} \to Set$ wird definiert durch:

- $h^A(B) : \mathcal{C} \to Set, B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ für alle $B \in \mathcal{C}$
- $h^A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A), g \mapsto g \circ f$ für alle $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$

Lemma 3.16
Der kovariante Hom-Funktor h_A ist linksexakt.

Beweis. Sei $0 \to L \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} M \to 0$ exakt. Betrachte nun $0 \to \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Hom}(N, B) \xrightarrow{i_0} \mathrm{Hom}(L, B)$. Damit diese Sequenz exakt ist, muss $\ker \pi_0 = 0$ und $\operatorname{im} \pi_0 = \ker i_0$ gelten.
Zu $\pi_0 = 0$: Sei $a \in \ker \pi_0 \Rightarrow \pi_0(a) = a \circ \pi = 0$. Da aber π ein Epimorphismus ist, muss $a = 0$ sein $\Rightarrow \pi_0$ ist injektiv.
Zu $\operatorname{im} \pi_0 = \ker i_0$: „$\subset$“: Sei $a \in \operatorname{im} \pi_0 \Rightarrow$ es existiert ein $b \in \mathrm{Hom}(M, B)$ mit $\pi_0(b) = a$, also $b : M \to B, a : N \to B$ und $b \circ \pi = a$. Da die ursprüngliche Sequenz exakt ist, gilt: $i_0(a) = a \circ i = b \circ \pi \circ i = 0 \Rightarrow a \in \ker i_0$.
„$\supset$“: Sei $a \in \ker i_0 \Rightarrow i_0(a) = a \circ i = 0 \Rightarrow \operatorname{im} i \subset \ker a$. Jetzt können wir den Homomorphiesatz anwenden: Es existiert eine Abbildung $\tilde{a} : N/\operatorname{im} i \to B$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddr, "a"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\exists m"] & 0 \\
 & & N/\operatorname{im} i \arrow[d, "\tilde{a}"] & \\
 & & B &
\end{tikzcd}$$

Außerdem ist $N/\operatorname{im} i$ der Kokern von i. Durch die universelle Eigenschaft des Kokerns existiert auch $m : M \to N/\operatorname{im} i$. Dann gilt $\tilde{a} \circ m : M \to B$ und $\pi_0(\tilde{a} \circ m) = \tilde{a} \circ m \circ \pi = \tilde{a} \circ p = a \Rightarrow a \in \operatorname{im} \pi_0$.

Insbesondere ist auch der kontravariante Hom-Funktor h^A linksexakt. Da aber der Beweis analog funktioniert und die Aussage nicht benötigt wird, überlassen wir den Beweis hierfür dem geneigten Leser zur leichten Übungsaufgabe.

Definition 3.17 (Erzeuger und Koerzeuger)
Ein Objekt $G \in \mathcal{C}$ heißt *Erzeuger*, falls für alle Morphismen $f, g : X \to Y$ mit $f \neq g$ ein Morphismus $h : G \to X$ existiert so, dass $h \circ f \neq h \circ g$.
Analog wird *Koerzeuger* als Erzeuger in der dualen Kategorie definiert: Ein Objekt $C \in \mathcal{C}$ heißt *Koerzeuger*, falls für alle Morphismen $f, g : X \to Y$ mit $f \neq g$ ein Morphismus $h : X \to Z$ existiert so, dass $f \circ h \neq g \circ f$.

Definition 3.18 (Adjunktion)
Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien und L, R Funktoren mit $\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$. Das Paar L, R heißt adjungiertes Paar, falls gilt:

$$\tau = \tau_{CD} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \quad \text{für alle} \quad C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$$

Diese Bijektion muss natürlich in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sein, das bedeutet, dass für alle Morphismen $f : C \to C'$ und $g : D \to D'$ mit $C, C' \in \mathcal{C}$ und $D, D' \in \mathcal{D}$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D) \arrow[r, "Lf"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C'), D) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C'), D') \arrow[d, "\tau"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \arrow[r, "f"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', R(D)) \arrow[r, "Rg"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', R(D'))
\end{tikzcd}$$

Wir nennen L linksadjungiert zu R und R rechtsadjungiert zu L.

Proposition 3.19
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $\mathcal{L} = L(\mathcal{A}, Ab) \subset Fun(\mathcal{A}, Ab)$ die Kategorie der linksexakten Funktoren von $\mathcal{A}$ nach Ab. Dann ist $\mathcal{L}$ abelsch.

Wir beweisen diesen Satz hier nicht, er ist in [Fre], Seite 148 im Theorem 7.31 nachzulesen. Freyd beweist darin zuerst, dass Morphismen in $\mathcal{L}(\mathcal{A}, Ab)$ genau dann Monomorphismen sind, wenn sie es in $Fun(\mathcal{A}, Ab)$ sind. Der Rest des Beweises ist komplizierter und wird hier nicht weiter ausgeführt.

Proposition 3.20
$\mathcal{L}$ besitzt genügend injektive Objekte.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}$ und $0 \to A \to I$ die injektive Hülle von A in $Fun(\mathcal{A}, Ab)$. I ist in $Fun(\mathcal{A}, Ab)$ injektiv. Da Kerne, also Monomorphismen in $Fun(\mathcal{A}, Ab)$ dieselben wie in $\mathcal{L}$ sind ([Fre], Seite 148, Theorem 7.31), ist I auch in $\mathcal{L}$ injektiv $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ besitzt genügend injektive Objekte.

Definition 3.21 (Reflection Funktor)
Wir definieren den Reflection Funktor R als den linksadjungierten Funktor zur Einbettung $i : \mathcal{L} \hookrightarrow Fun(\mathcal{A}, Ab)$. Nach [Swa] hat R folgende Eigenschaften:

- $R \circ i = id_{\mathcal{L}}$

- R ist rechtsexakt (da linksadjungierte Funktoren rechtsexakt sind)

Satz 3.22 (Yoneda Lemma)
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $F : \mathcal{C} \to Set$ ein Funktor, $A \in \mathcal{C}$, dann gilt in $Fun(\mathcal{C}, Set)$: $\mathrm{Hom}(h_A, F) \cong F(A) \subset Set$.

Beweis. Für den Beweis benutzen wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[rrr, "\mathrm{Hom}(A,f)"] \arrow[ddd, "\Phi_A"'] & & & \mathrm{Hom}(A,X) \arrow[ddd, "\Phi_X"] \\
& id_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f \arrow[d, mapsto] & \\
& u \arrow[r, mapsto] & (Ff)u = \Phi_X(f) & \\
F(A) \arrow[rrr, "Ff"'] & & & F(X)
\end{tikzcd}$$

Da Φ eine natürliche Transformation ist, kommutiert das Diagramm und wir wissen:

$$(Ff)(\Phi_A(id_A)) = \Phi_X(f)$$

Die linke Seite können wir einfach ausrechnen. Sie ist eindeutig und nur abhängig vom Bild der Identität und dem Funktor F. So können wir also für jedes $X \in \mathcal{C}$ ein eindeutiges $\Phi_X(f)$ für jeden Morphismus f berechnen. Damit ist die Yoneda Abbildung $\mathcal{Y}$ bijektiv und die Behauptung ist bewiesen.

Korollar 3.23 (Yoneda Einbettung)
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $h_A : \mathcal{A} \to Set$ der kovariante Hom-Funktor. Dann gilt in $Fun(\mathcal{A}, Ab)$: $\mathrm{Hom}(h_A, h_B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ für alle $B \in \mathcal{A}$

Beweis. Anwendung des Yoneda Lemmas mit dem Funktor h_A.

4 Freyd-Mitchellscher Einbettungssatz

Satz 4.1 (Freyd-Mitchellscher Einbettungssatz)
Jede abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ ist volle Unterkategorie von R-Mod *für einen Ring R.*

4.1 Einbettung in die Kategorie der linksexakten Funktoren

Satz 4.2
Jede abelsche Kattegorie $\mathcal{A}$ ist volle Unterkategorie von $\mathcal{L} = L(\mathcal{A}, Ab) \subset Fun(\mathcal{A}, Ab)$, der Kategorie der linksexakten Funktoren.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Wir wollen zeigen, dass der Funktor $H : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, der einem Objekt $A \in \mathcal{A}$ den Hom-Funktor h_A zuordnet, exakt und volltreu ist. Dabei ist zu beachten, dass H als Funktor von $\mathcal{A}$ nach $Fun(\mathcal{A}, Ab)$ noch nicht exakt ist. Wenn das der Fall wäre, wären wir ja schon fertig. Deshalb betrachten wir hier H als Funktor von $\mathcal{A}$ nach $L(\mathcal{A}, Ab)$, dieser ist dann tatsächlich exakt und volltreu.
Nach dem Yoneda Lemma ist $h_A(B) = \mathrm{Hom}(A, B)$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(h_B, h_A)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$, was genau der Definition von volltreu entspricht. Die Linksexaktheit erbt er vom Hom-Funktor (folgt direkt aus der Definition von H).
Wir müssen nun noch zeigen, dass H rechtsexakt ist. Sei $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exakt. Dann ist für alle $B \in \mathcal{A}$ folgende Sequenz exakt: $0 \to \mathrm{Hom}(A'', B) \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A', B)$.
Daraus können wir nun mit Hilfe des Kokerns eine exakte Sequenz in der Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, Ab)$ bilden: $0 \to h_{A''} \to h_A \to h_{A'} \to Q = \mathrm{coker}(h_{A'} \to h_A) \to 0$. Wir wollen daraus nun eine exakte Sequenz in $\mathcal{L}$ bilden, also wenden wir den Reflection Functor an. Da alle h_A schon linksexakt sind, ist für sie nach 3.21 $R = id$.
Dies liefert uns folgende exakte Sequenz in $\mathcal{L}$: $0 \to h_{A''} \to h_A \to h_{A'} \to RQ \to 0$. Wenn wir nun zeigen können, dass $RQ = 0$ gilt, wissen wir, dass die Sequenz auch in L exakt ist und damit wäre H auch exakt.
Nach [Swa] reicht es zu zeigen, dass Q schwach auslöschbar ist, was bedeutet, dass es zu jedem $x \in Q(B)$ einen Monomorphismus $f : B \to C$ gibt so, dass $Q(f)x = 0$ ist.
Sei $x \in Q(B)$ für ein $B \in \mathcal{A}$. Wir suchen nun einen Monomorphismus $B \xrightarrow{f} C$ so, dass $Q(f)x = 0$ gilt. Sei $g \in \mathrm{Hom}(A', B)$ ein Urbild von x unter der Abbildung $\mathrm{Hom}(A', B) \to Q(B)$. Wir bilden dazu nun folgendes Pushoutdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{A''}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nun betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A',B) \arrow[r] \arrow[d] & Q(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathrm{Hom}(A,P) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A',P) \arrow[r] & Q(P) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

g wird unter $\mathrm{Hom}(A', B) \to Q(B)$ zu x, aber unter $\mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Hom}(A', P)$ wird es zu fg in $\mathrm{Hom}(A', P)$. fg wiederum kommt von $h \in \mathrm{Hom}(A, P)$. Da die Zeilen exakt sind, muss fg unter $\mathrm{Hom}(A', P) \to Q(P)$ auf die Null geschickt werden. Da das Diagramm kommutiert (weil die einzelnen Quadrate kommutieren), wird auch x auf die Null geschickt und wir haben unser f mit $Q(f)x = 0$ gefunden.
Q ist also schwach auslöschbar, damit ist $RQ = 0$ und H ist exakt. H bettet also $\mathcal{A}$ volltreu und exakt in $L(\mathcal{A}, Ab)$ ein.

Jetzt haben wir schon unsere abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ volltreu und exakt in $\mathcal{L}$, die Kategorie der linksexakten Funktoren, eingebettet (die nach 3.19 und 3.20 ebenfalls **abelsch** ist und außerdem **genügend injektive Objekte** besitzt). $\mathcal{L}$ besitzt außerdem noch einen **Erzeuger**, da wir mit dem Reflection Funktor einen Erzeuger aus $Fun(\mathcal{A}, Ab)$ nach $\mathcal{L}$ zurückholen können.
Wenn wir nun $\mathcal{L}$ noch mit dem Dualitätsfunktor (der Funktor, der die Objekte gleich lässt und die Morphismen vertauscht) in $\mathcal{L}^{op}$ exakt und volltreu (folgt leicht aus den Definitionen) einbetten, haben wir $\mathcal{A}$ in eine Kategorie $\mathcal{L}^{op}$ eingebettet, die

- abelsch ist
- genügend projektive Objekte hat (da $\mathcal{L}$ genügend injektive Objekte hat)
- einen Koerzeuger besitzt (da $\mathcal{L}$ einen Erzeuger hat).

4.2 Einbettung in die Kategorie der R-Moduln

Wir betrachten nun die duale Kategorie $\mathcal{L}^{op}$ zu $\mathcal{L}$. Wir wissen von der Kategorie $\mathcal{L}^{op}$, dass sie genügend projektive Objekte und einen Koerzeuger hat und abelsch ist (die dualen Eigenschaften zu den Eigenschaften von $\mathcal{L}$). Um $\mathcal{L}^{op}$ nun exakt und volltreu in R-Mod einzubetten, möchten wir erst zeigen, dass $\mathcal{L}^{op}$ einen projektiven Erzeuger P hat und für alle $A \in \mathcal{A}$ ein Epimorphismus $P \to H(A)$ existiert. Diesen brauchen wir später, wenn wir zeigen wollen, dass die zweite Einbettung voll ist. Dann werden wir einen Ring R und eine Verknüpfung darauf für R-Mod definieren. Danach ist nur noch zu zeigen, dass die Einbettung exakt und volltreu ist.

Satz 4.3
$\mathcal{L}^{op}$ hat einen projektiven Erzeuger P und für alle $A \in \mathcal{A}$ existiert ein Epimorphismus $\mu : P \to H(A)$, wobei H der Funktor der ersten Einbettung ist.

Beweis. Sei C ein Koerzeuger von $\mathcal{L}^{op}$ und $\{A_\alpha\}$ die Menge der Unterobjekte von C. Da $\mathcal{L}^{op}$ abelsch ist, existiert auch die Summe $\sum A_\alpha$. Außerdem existiert ein projektives Objekt P so, dass $P \xrightarrow{f} \sum A_\alpha$, wobei f ein Epimorphismus ist. Wir behaupten nun, P sei ein Erzeuger. Dies ist äquivalent dazu, dass h_P ein treuer Funktor ist. Da h_P auch exakt ist, können wir hier Lemma 3.14 anwenden. Zu zeigen ist nur, dass für alle $B \in \mathcal{L}^{op}$ gilt: $T(B) = 0 \Rightarrow B = 0$. Wir zeigen hier die äquivalente Aussage: $B \in \mathcal{L}^{op}, B \neq 0 \Rightarrow T(B) = \mathrm{Hom}(P, B) \neq 0$. Sei also $B \neq 0$. Da C ein Koerzeuger ist, können wir ein $g : B \to C$ finden mit $g = g\,\mathrm{id}_B \neq 0$. Also haben wir $B \twoheadrightarrow \operatorname{im} g \hookrightarrow C$. $\operatorname{im} g$ ist also ein Unterobjekt von C. Da $\mathcal{L}$ genügend Projektive hat, finden wir ein $P \twoheadrightarrow \operatorname{im} g$ mit P projektiv. Das folgende Diagramm kommutiert also:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d] & \\ B \arrow[r] & \operatorname{im} g \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Da aber $g \neq 0 \Rightarrow \operatorname{im} g \neq 0 \Rightarrow P \twoheadrightarrow \operatorname{im} g \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$ und es gilt $h \in \mathrm{Hom}(P, B)$. Also ist $\mathrm{Hom}(P, B) \neq 0$. Also muss h_P treu sein.

Mit dem $B \in \mathcal{L}^{op}$ konstruieren wir nun $\sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}(P,B)} P_f \xrightarrow{F} B$, indem wir immer eine Kopie von dem projektiven Erzeuger P nehmen und sie durch f auf B abbilden. Wir behaupten, dass F ein Epimorphismus ist.

Wir betrachten die Sequenz $\sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}(P,B)} P_f \xrightarrow{F} B \to Q \to 0$. Diese Sequenz ist exakt, weil Q der Kokern von $\sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}(P,B)} P_f \to B$ ist. Falls $Q \neq 0$, dann existiert ein $P \xrightarrow{h} Q$ mit $h \neq 0$. Da P projektiv ist, existiert ein g so, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

Aber die g-te Komponente von $\sum P_f$ der exakten Sequenz oben sagt uns, dass $h = 0$ sein muss (wegen der Exaktheit). Also muss auch $Q = 0$ und damit muss F ein Epimorphismus sein, da die obige Sequenz exakt ist.

Sei nun P_1 ein beliebiger projektiver Erzeuger, sei $P := \sum\limits_{A \in \mathcal{A}} \sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}(P_1, H(A))} P_1$. Dann ist P ein projektiver Erzeuger so, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ ein Epimorphismus $P \to H(A)$ existiert.

Definition 4.4

Wir definieren $R := \mathrm{Hom}(P, P)$. R wird mit der Komposition als Verknüpfung zu einem Ring mit $1 = \mathrm{id}_P$ und $0 = 0_P$. Mit folgender Verknüpfung können wir R-Moduln definieren.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "fr"'] & P \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Für ein $r \in R$ und $P \xrightarrow{f} B$.

Satz 4.5
$\mathcal{L}^{op} \overset{T}{\to}$ R-Mod, $T(B) := h_B = \operatorname{Hom}(P, B)$ *bettet* $\mathcal{L}^{op}$ *volltreu und exakt in* R-Mod *ein.*

Beweis. T ist exakt, da P projektiv ist.
T ist volltreu $\Leftrightarrow \operatorname{Hom}(A, B) \overset{\alpha}{\to} \operatorname{Hom}(T(A), T(B))$ für alle $A, B \in H(\mathcal{L}^{op})$ ist injektiv und surjektiv.
Wir zeigen nun: $\alpha : \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(T(A), T(B))$ ist surjektiv.
Sei $f \in \operatorname{Hom}(T(A), T(B))$ mit $A, B \in \operatorname{im} H$. Also $f : T(A) \to T(B)$, beziehungsweise $f : \operatorname{Hom}(P, A) \to \operatorname{Hom}(P, B)$ ist ein R-Homomorphismus. Nun wollen wir ein $g : A \to B$ finden, welches das Urbild von f ist. Wir haben oben gezeigt, dass es einen Epimorphismus $\mu \in \operatorname{Hom}(P, A)$ gibt. Es gilt: Für $x \in \operatorname{Hom}(P, A)$ existiert ein $r : P \to P$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, "x"] & \\ P \arrow[r, hook, "\mu"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Also ist $\mu r = x$. Wir sagen: μ erzeugt $\operatorname{Hom}(P, A)$ als ein R-Modul. Wir müssen also das g so wählen, dass $f(\mu) = g\mu$. Dazu betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "r"] & & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\ & & P \arrow[r, "f(\mu)"'] & B & \end{tikzcd}$$

Falls $f(\mu)\, \mathrm{id}_P\, i = 0$, dann muss g existieren, da A der Kokern von i ist (μ ist ein Epimorphismus, daher auch ein Kokern) und g faktorisiert durch μ.

Sei also $f(\mu)\,\mathrm{id}_P\, i \neq 0$. Dann existiert ein $h : P \to K$ so, dass $f(\mu)\,\mathrm{id}_p\, ih \neq 0$ (da P ein Erzeuger ist). Aber $ih = r : P \to P \Rightarrow ih \in R$. Also haben wir $f(\mu)r \neq 0$, aber auch $\mu r = \mu ih = \mu 0 = 0$. Da f ein R-Homomorphismus ist, gilt:
$f(\mu)r = f(\mu r) = f(0) = 0 \lightning \Rightarrow g$ existiert. α muss also surjektiv sein.
Wir zeigen nun: $\alpha : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(T(A), T(B))$ ist injektiv.
Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ mit $f \neq g$. Dann sind $\alpha(f), \alpha(g) : \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B)$. Da P aber ein Erzeuger ist, muss $\alpha(f) \neq \alpha(g)$ sein. Also ist α auch injektiv und damit bijektiv und damit ist T volltreu.

4.3 Verkettung der Einbettungen

Beweis des Einbettungssatzes. Wir verknüpfen die beiden Funktoren H^{op} und T zu $TH^{op} : \mathcal{A} \to$ R-Mod, wobei H^{op} den Funktor bezeichnen soll, der durch Verknüpfung von H mit dem Dualitätsfunktor entsteht. Da wir in diesem Kapitel bewiesen haben, dass beide Funktoren exakt und volltreu sind, ist auch deren Komposition exakt und volltreu. Damit haben wir $\mathcal{A}$ exakt und volltreu in R-Mod eingebettet.

5 Schlusswort

Das Ziel dieser Arbeit war für mich, eine grundlegende Aussage der Kategorientheorie für den Leser verständlich zu beweisen. Das Ziel einer wissenschaftlichen Arbeit in der Mathematik sollte immer das Verständnis des Lesers sein. Ich hoffe, ich habe bei allen Lesern dieser Arbeit Lust auf die wundervolle Vielfalt und Schönheit der Kategorientheorie hervorgerufen oder verstärkt. Kategorientheorie bezaubert mich, weil sie sehr abstrakt und trotzdem universell ist. In der Kategorientheorie gibt es zu den meisten Aussagen und Definitionen eine duale Aussage, was meiner Meinung nach schnell zu Glücksgefühlen führen kann, denn wer zum Beispiel eine Aussage liest und die duale Aussage formulieren oder sogar beweisen kann - nur mit dem Wissen über die ursprüngliche Aussage - hat schnell viele eigenständige Entdeckungen gemacht. Dadurch kann man sich vieles in der Kategorientheorie selbst herleiten und das macht wohl jeden Mathematiker glücklich.

Neben der schriftlichen Ausarbeitung habe ich den Artikel über den Freyd-Mitchellschen Einbettungssatz in der englischen Wikipedia ([Wik] Version vom 15.12.2010) verschönert. Ich möchte damit auch diejenigen Leser erreichen, die keinen Zugang zu meiner Arbeit haben.

6 Referenzen und Quellen

[Swa] R. G. Swan, *Lecture Notes in Mathematics 76*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1968)
[Wei] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (1993)
[Mit] Barry Mitchell, *The full imbedding theorem*, The Johns Hopkins University Press (1964)
[Fre] Peter Freyd, *Abelian categories*, Harper and Row (1964)
[Wik] `http://en.wikipedia.org/wiki/Mitchell%27s_embedding_theorem` (Version vom 15.12.2010)

7 Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Linda Raabe, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden im Kapitel „Referenzen und Quellen“ kenntlich gemacht.